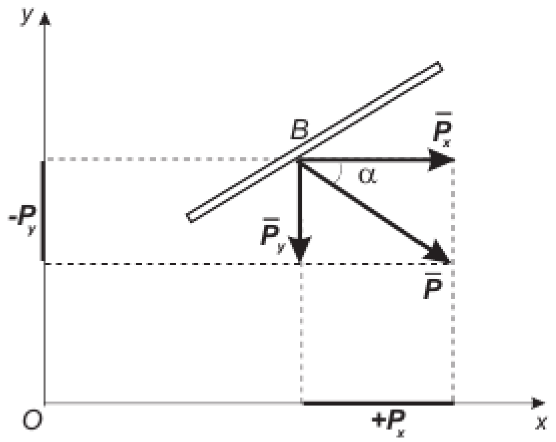
Разложение вектора силы на составляющие:



$$\overline{P} = \overline{P}_x + \overline{P}_y$$

$$P_x = P\cos\alpha$$

$$P_y = P\sin\alpha$$

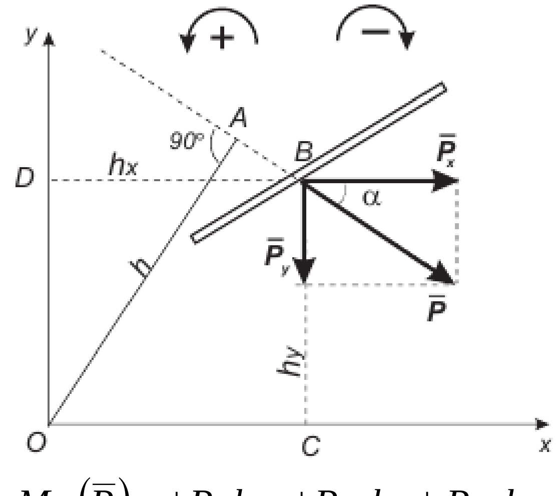
Проекции вектора силы на оси координат:

$$+P_x = +P\cos\alpha$$

$$-P_y = -P\sin\alpha$$

Проекция силы на ось положительна, если направление вектора силы и оси координат совпадают, проекция силы на ось отрицательна, если направление вектора силы и оси координат противоположны.

Момент силы относительно заданного центра характеризует вращательное действие силы на тело:



$$M_O\left(\overline{P}\right) = \pm P \cdot h = \pm P_x \cdot h_y \pm P_y \cdot h_x$$

Момент равен произведению силы на плечо – кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы (перпендикуляр на линию действия силы).
Плечи сил:

$$h = OA\,, \qquad OA \perp \overline{P}$$

$$h_x = BD\,, \qquad BD \perp \overline{P}_y$$

$$h_y = BC\,, \qquad BC \perp \overline{P}_x$$

Знак момента положительный, если сила вращает против часовой стрелки вокруг выбранного центра, и отрицательный, если сила вращает по часовой стрелке.

Уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил имеют вид:

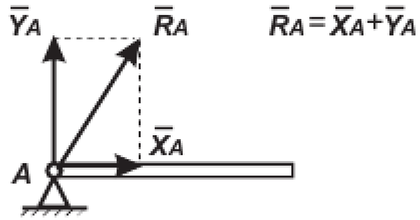
$$\begin{cases} \sum P_{x_i} = 0 \ ; \\ \sum P_{y_i} = 0 \ ; \\ \sum M_O\left(\overline{P_i}\right) = 0 \end{cases}$$

P_{x_i} , P_{y_i} - проекции силы $\overline{P_i}$ на оси координат x, y; O – произвольная точка.

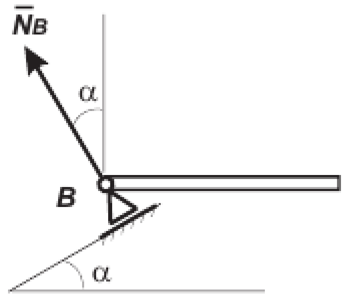
Т.е. суммы проекций всех сил на взаимно перпендикулярные оси и сумма моментов всех сил относительно произвольного центра равны нулю.

Внешние связи (опоры) и их реакции:

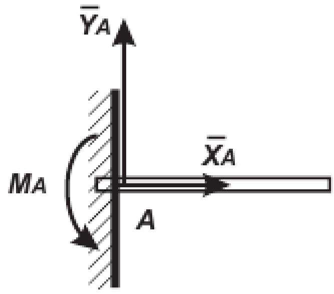
1. Неподвижный цилиндрический шарнир



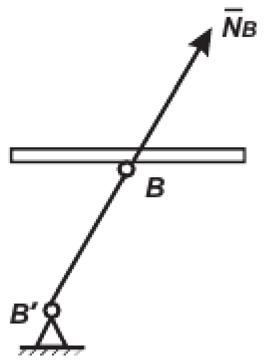
2. Подвижный цилиндрический шарнир



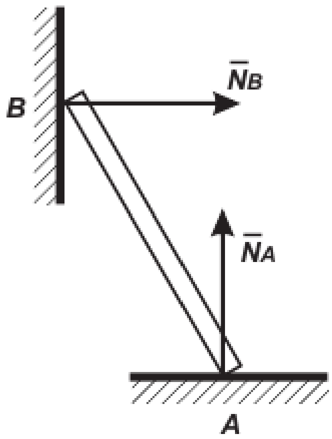
3. Жесткая заделка



4. Стержневая опора

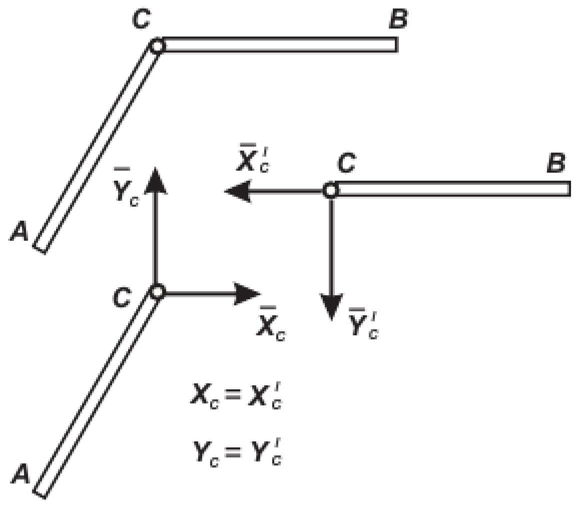


5. Идеально гладкая плоскость

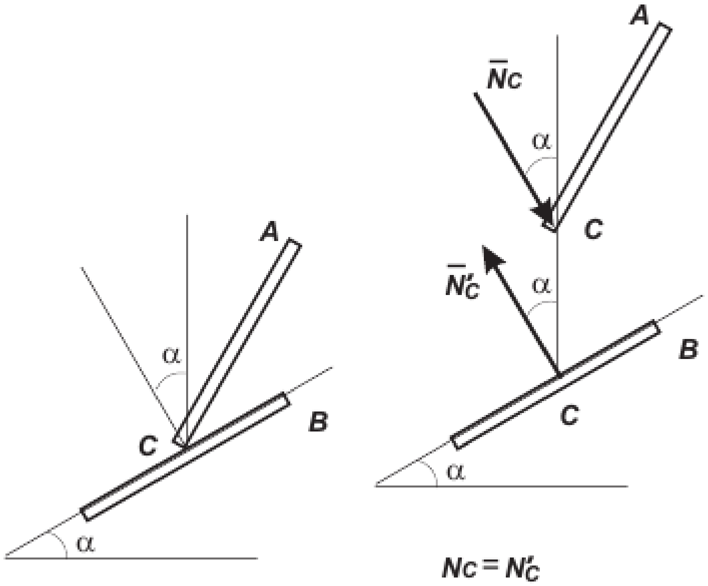


Внутренние связи и их реакции:

1. Внутренний шарнир

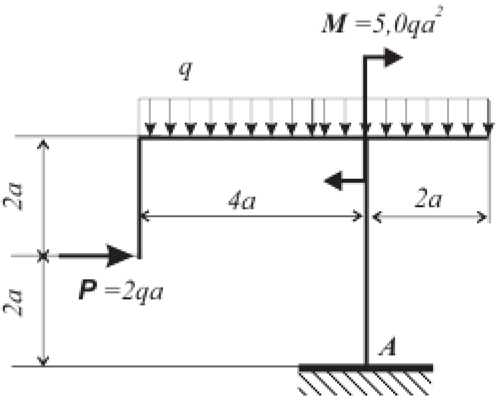


2. Стержни, опирающиеся друг на друга (трение отсутствует)

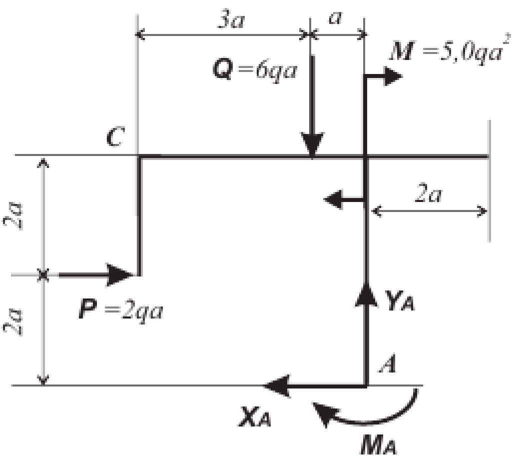


Задание: определить реакции опор плоской рамы

Задача 1



Определим реакции в заделке A X_A, Y_A, M_A.



Равнодействующая распределенной нагрузки приложена посередине участка нагружения $Q = q \cdot 6a = 6qa$.

Уравнения равновесия для рамы:

$$\begin{cases}\sum P_{x_i}=0\\ \sum P_{y_i}=0\\ \sum M_A(\overline{P}_i)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X_A-P=0\\ Y_A-Q=0\\ -M_A-M-P\cdot 2a+Q\cdot a=0\end{cases}$$

$\Rightarrow X_A=P=2qa;\ Y_A=Q=6qa;\ \ M_A=-M-P\cdot 2a+Q\cdot a=-3qa^2$

Отрицательные знаки реакций указывают, что их истинное направление противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Проверка:

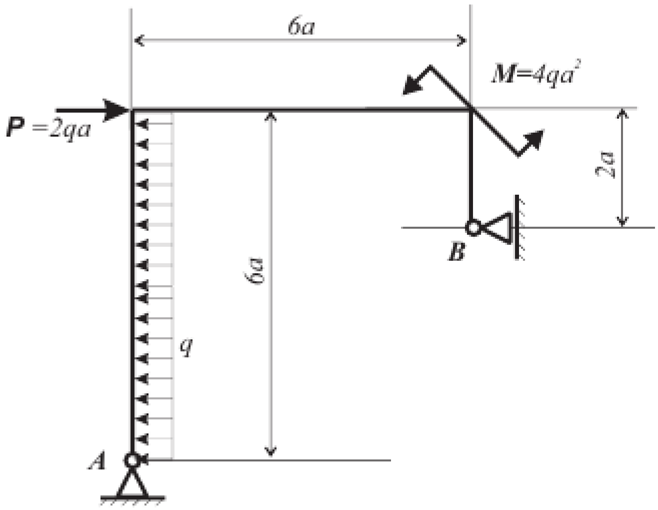
$\sum M_C(\overline{P}_i)=0 \quad \Rightarrow \quad -M_A-M+Y_A\cdot 4a-X_A\cdot 4a+P\cdot 2a-Q\cdot 3a=$

$=+3qa^2-5qa^2+6qa\cdot 4a-2qa\cdot 4a+2qa\cdot 2a-6qa\cdot 3a=+31qa^2-31qa^2=0$

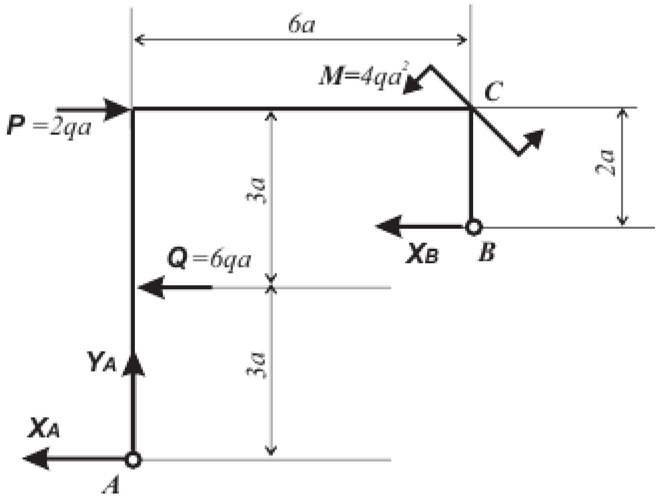
Проверка сошлась.

Ответ: $X_A=+2qa;\ Y_A=+6qa;\ \ M_A=-3qa^2$

Задача 2



Определим реакции в шарнирных опорах A и B X_A, Y_A, X_B.



Равнодействующая распределенной нагрузки приложена посередине участка нагружения $\quad Q=q\cdot 6a=6qa$.

Уравнения равновесия для рамы:

$$\begin{cases}\sum P_{x_i}=0\\ \sum P_{y_i}=0\\ \sum M_A\left(\overline{P}_i\right)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-X_A-X_B+P-Q=0\\ Y_A=0\\ +M+X_B\cdot 4a-P\cdot 6a+Q\cdot 3a=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_A=0;\ \ X_B=\frac{-M+P\cdot 6a-Q\cdot 3a}{4a}=-2{,}5qa;\quad X_A=-X_B+P-Q=-1{,}5qa$$

Отрицательные знаки реакций указывают, что их истинное направление противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Проверка:

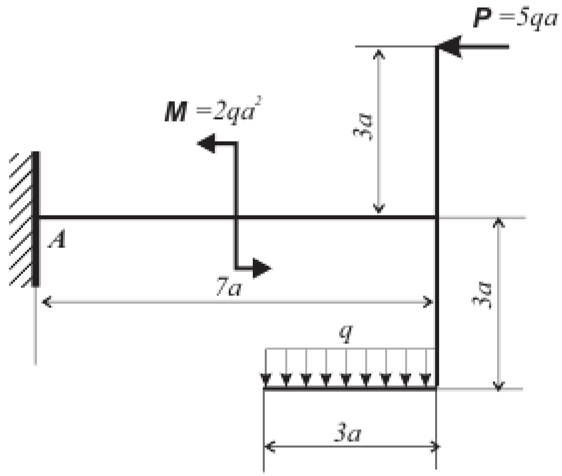
$$\sum M_C\left(\overline{P}_i\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad +M-X_A\cdot 6a-Y_A\cdot 6a-X_B\cdot 2a-Q\cdot 3a=$$

$$=+4qa^2+1{,}5qa\cdot 6a-0+2{,}5qa\cdot 2a-6qa\cdot 3a=+18qa^2-18qa^2=0$$

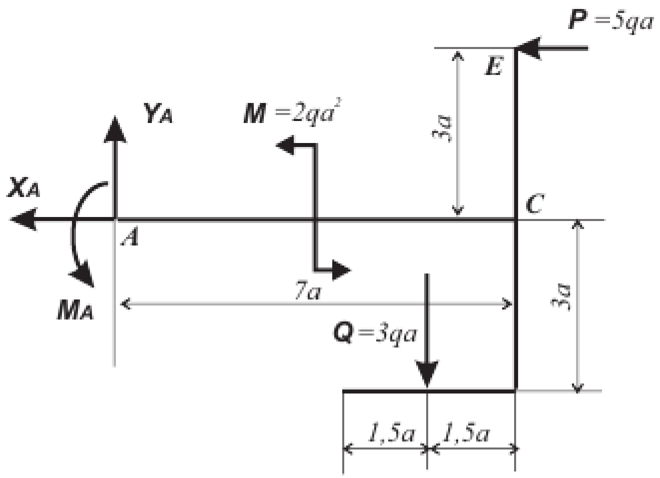
Проверка сошлась.

Ответ: $X_B=-2{,}5qa;\quad X_A=-1{,}5qa;\ Y_A=0$

Задача 3



Определим реакции в заделке A X_A, Y_A, M_A.



Равнодействующая распределенной нагрузки приложена посередине участка нагружения $Q=q\cdot 3a=3qa$.

Уравнения равновесия для рамы:

$$\begin{cases}\sum P_{x_i}=0\\ \sum P_{y_i}=0\\ \sum M_A(\overline{P}_i)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-X_A-P=0\\ +Y_A-Q=0\\ +M_A+M+P\cdot 3a-Q\cdot 5{,}5a=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow X_A=-P=-5qa;\ Y_A=Q=3qa;\ \ M_A=-M-P\cdot 3a+Q\cdot 5{,}5a=-0{,}5qa^2$$

Отрицательные знаки реакций указывают, что их истинное направление противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Проверка:

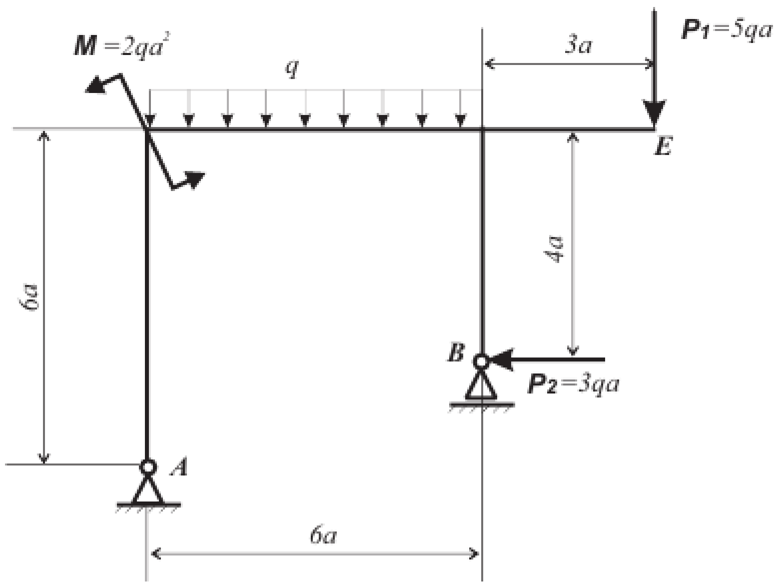
$$\sum M_C(\overline{P}_i)=0 \quad \Rightarrow \quad +M_A+M-Y_A\cdot 7a+P\cdot 3a+Q\cdot 1{,}5a=$$

$$=-0{,}5qa^2+2qa^2-3qa\cdot 7a+5qa\cdot 3a+3qa\cdot 1{,}5a=-21{,}5qa^2+21{,}5qa^2=0$$

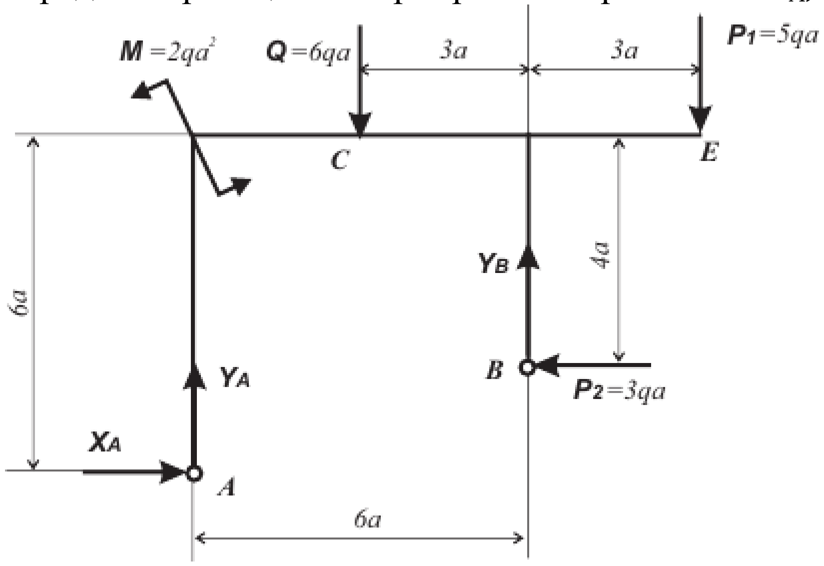
Проверка сошлась.

Ответ: $X_A=-5qa;\ Y_A=+3qa;\ \ M_A=-0{,}5qa^2$

Задача 4



Определим реакции в шарнирных опорах A и B X_A, Y_A, Y_B.



Равнодействующая распределенной нагрузки приложена посередине участка нагружения $\quad Q=q\cdot 6a=6qa$.

Уравнения равновесия для рамы:

$$\begin{cases}\sum P_{x_i} = 0 \\ \sum P_{y_i} = 0 \\ \sum M_A\left(\overline{P}_i\right) = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}+X_A - P_2 = 0 \\ Y_A + Y_B - Q - P_1 = 0 \\ +M + Y_B \cdot 6a - P_1 \cdot 9a + P_2 \cdot 2a - Q \cdot 3a = 0\end{cases}$$

$$X_A = P_2 = +3qa;$$

$$\Rightarrow \qquad Y_B = \frac{-M + P_1 \cdot 9a - P_2 \cdot 2a + Q \cdot 3a}{6a} = +9{,}167qa;$$

$$Y_A = -Y_B + Q + P_1 = +1{,}833qa$$

Положительные знаки реакций указывают, что их истинное направление соответствует направлению, выбранному на чертеже.

Проверка:

$$\sum M_C\left(\overline{P}_i\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad +M + X_A \cdot 6a - Y_A \cdot 3a + Y_B \cdot 3a - P_1 \cdot 6a - P_2 \cdot 4a =$$

$$= +2qa^2 + 3qa \cdot 6a - 1{,}833qa \cdot 3a + 9{,}167qa \cdot 3a - 5qa \cdot 6a - 3qa \cdot 4a =$$

$$= +47{,}501qa^2 - 47{,}499qa^2 = +0{,}002 \approx 0$$

Проверка сошлась.

Ответ: $X_A = +3qa;\ \ Y_A = +1{,}833qa;\ Y_B = +9{,}167qa$

Определение реакций связей составной конструкции

Для составной конструкции, состоящей из угольника и стержня, скрепленных внутренним шарниром, определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками.

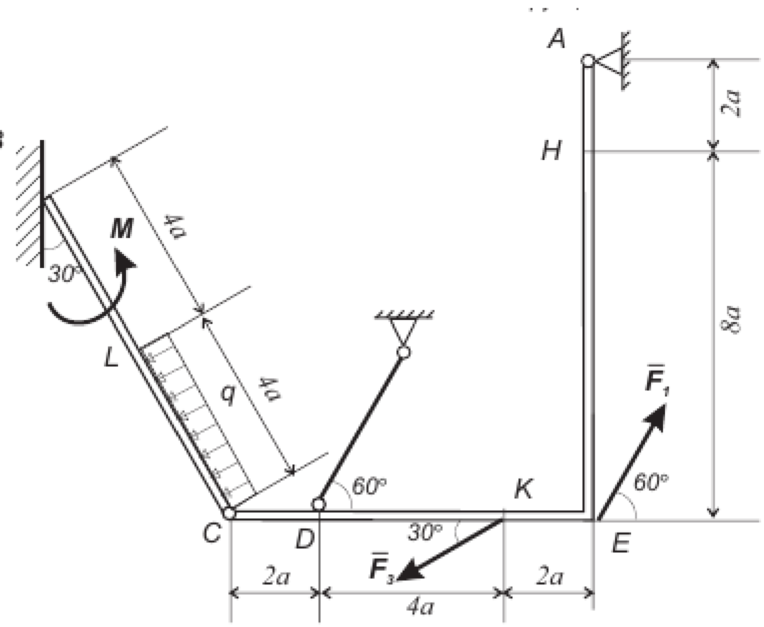


Рисунок 1. Расчетная схема конструкции

Исходные данные:

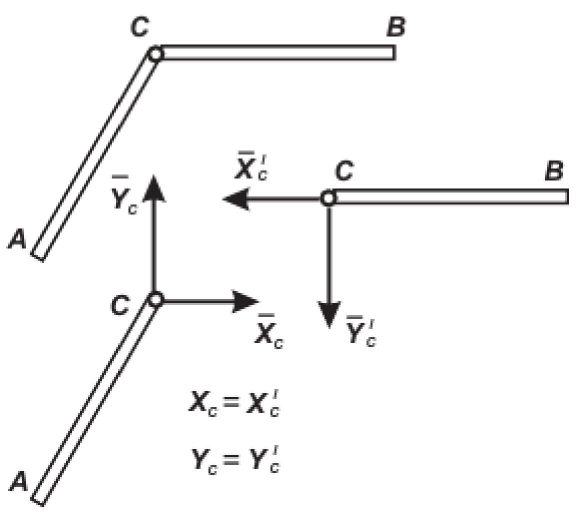
a=0,5 м; M=100 кН м; F_1*=40 кН;* α_1*=60°; точка приложения E;* F_3*=20 кН;* α_3*=30°; точка приложения K; q=50 кН/м; участок действия нагрузки CL.*

Определить: Реакции в неподвижном шарнире *A*, стержневой опоре *D*, реакцию, действующую со стороны вертикальной поверхности на стержень в точке *B*, давление во внутреннем шарнире *C*.

Указания к решению задачи

Это задача на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия.

Реакции внутреннего шарнира:



Решение

Равнодействующая распределенной нагрузки :

$Q = q\,l_{CL} = q \cdot 4a \; = 50 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 100\ кН;$

Составляющие распределенной нагрузки:

$Q_x = Q\cos 30^\circ = 86{,}603\,кН;$

$Q_y = Q\sin 30^\circ = 50{,}0\,кН;$

Составляющие сосредоточенных нагрузок:

$F_{1x} = F_1\cos 60^\circ = 20{,}0\,кН;\; F_{1y} = F_1\sin 60^\circ = 34{,}641кН;$

$F_{3x} = F_3\cos 30^\circ = 17{,}321\,кН;\; F_{3y} = F_3\sin 30^\circ = 10{,}0\,кН$

Составляющие реакции стержневой опоры:

$N_{Dx} = N_D\cos 60^\circ = 0{,}5N_D;$

$$N_{Dy} = N_D\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}N_D = 0{,}866\,N_D$$

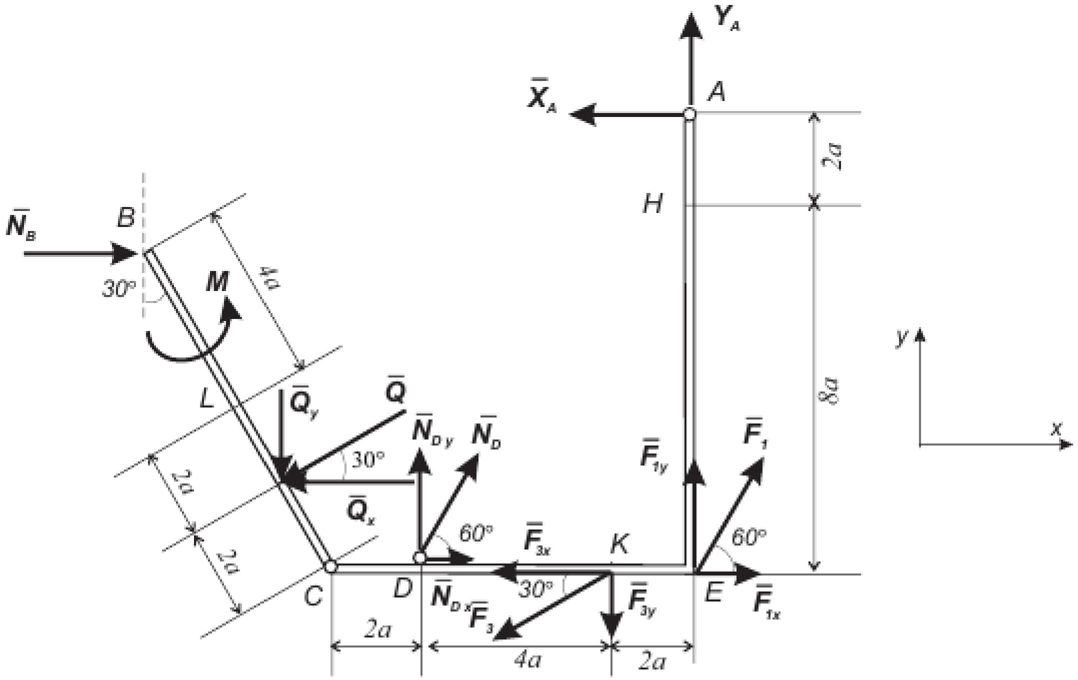


Рисунок 2. Схема сил для конструкции в целом

Конструкцию разобьем на две части по внутреннему шарниру С.

Уравнения равновесия левой половины (стержня):

$\sum P_{x_i} = 0 \;\Rightarrow\; X_C - Q_x + N_B = 0;$

$\sum P_{y_i} = 0 \;\Rightarrow\; -Y_C - Q_y = 0;$

$\sum M_C\left(\overline{P}_i\right) = 0 \Rightarrow\; M - N_B 8a\cos 30^\circ + Q2a = 0$

Уравнения равновесия правой половины (угольника):

$$\sum P_{x_i} = 0 \;\Rightarrow\; -X'_C - X_A + N_{Dx} + F_{1x} - F_{3x} = 0;$$

$$\sum P_{y_i} = 0 \;\Rightarrow\; Y'_C + Y_A + N_{Dy} + F_{1y} - F_{3y} = 0;$$

$$\sum M_A(\overline{P}_i) = 0 \Rightarrow -X'_C 10a - Y'_C 8a - N_{Dy} 6a + N_{Dx} 10a + F_{1x} 10a - F_{3x} 10a + F_{3y} 2a = 0$$

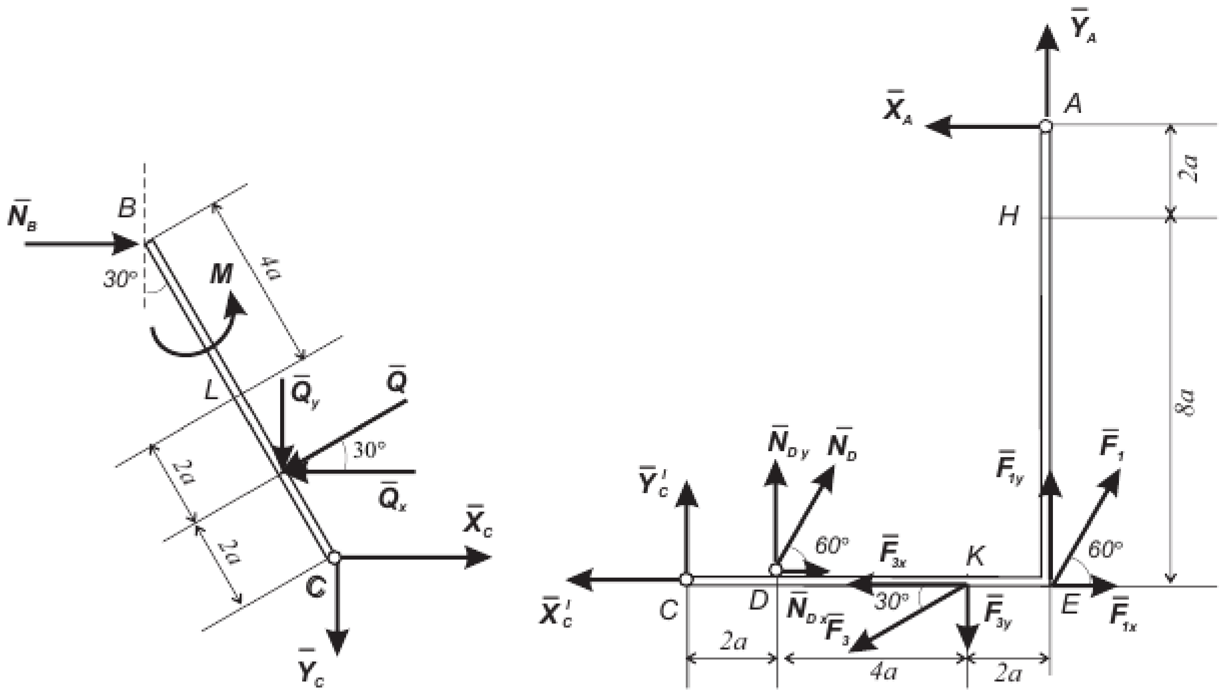


Рисунок 3. Схемы сил для правой (стержень) и левой (угольник) частей конструкции

Получена система шести уравнений равновесия относительно шести неизвестных реакций связей ($X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$).

Определяем неизвестные реакции связей:

$$N_B = \frac{M + Q2a}{\cos 30° 8a} = 57{,}735 \text{ кН},$$

$$X'_C = X_C = Q_x - N_B = 28{,}868 \text{ кН},$$

$$Y'_C = Y_C = -Q_y = -50{,}0 \text{ кН},$$

$$-X_C 10 - Y_C 8 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_D 6 + 0{,}5 N_D 10 + F_{1x} 10 - F_{3x} 10 + F_{3y} 2 = 0$$

$$N_D = \frac{-X_C 10 - Y_C 8 + F_{1x} 10 - F_{3x} 10 + F_{3y} 2}{\left(3\sqrt{3} - 5\right)} = 806{,}107 \text{ кН},$$

$$N_{Dx} = 0{,}5 N_D = 403{,}053 \text{ кН},$$

$$N_{Dy} = \frac{\sqrt{3}}{2} N_D = 698{,}109 \text{ кН},$$

$$X_A = -X_C + N_{Dx} + F_{1x} - F_{3x} = 376{,}865 \text{ кН},$$

$$Y_A = -Y_C - N_{Dy} - F_{1y} + F_{3y} = -672{,}750 \text{ кН}$$

Отрицательные знаки некоторых реакций указывают, что их истинное направление противоположно направлению, выбранному на чертеже.
Составим проверочное уравнение для конструкции, не разделенной по шарниру C:

$$\sum M_E\left(\overline{P}_i\right)=0 \Rightarrow$$

$$X_A 10a - N_{Dy} 6a + M - N_B 8a\cos 30^\circ + F_{3y} 2a +$$

$$+ Q_y\left(8a + 2a\sin 30^\circ\right) + Q_x 2a\cos 30^\circ =$$

$$= 376{,}865 \cdot 10 \cdot 0{,}5 - 698{,}109 \cdot 6 \cdot 0{,}5 + 100{,}0 - 57{,}735 \cdot 8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 + 10{,}0 \cdot 2 \cdot 0{,}5 +$$

$$+ 50{,}0 \cdot \left(8 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5\right) + 86{,}603 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 = 1784{,}327 - 1784{,}327 = 0$$

Проверка сошлась.

Ответ:

$$N_B = 57{,}735 \text{ кН},$$

$$X'_C = X_C = 28{,}868 \text{ кН},$$

$$Y'_C = Y_C = -50{,}0 \text{ кН},$$

$$N_D = 806{,}107 \text{ кН},$$

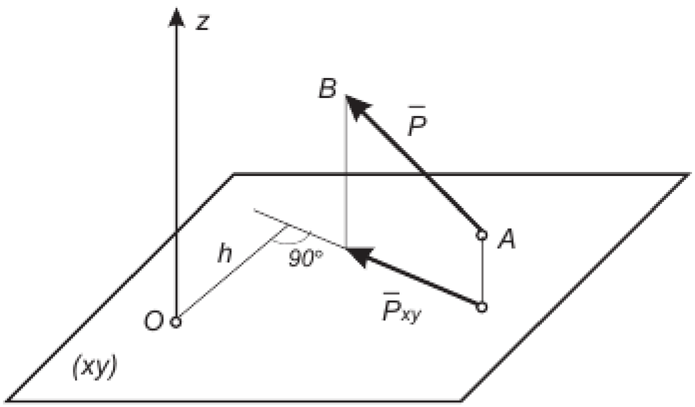
$$X_A = 376{,}865 \text{ кН},$$

$$Y_A = -672{,}750 \text{ кН}$$

Пространственная система сил

Момент силы относительно оси

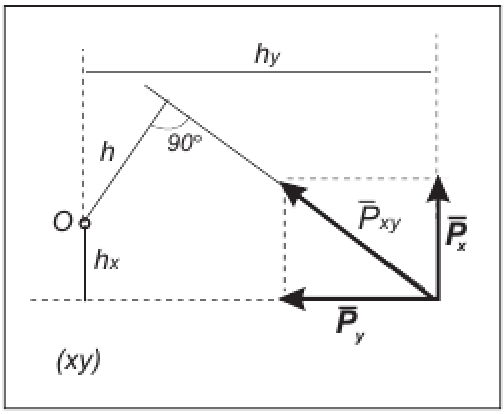
Момент силы $\overline{P}$ относительно оси z $M_z(\overline{P})$ характеризует вращательный эффект силы $\overline{P}$, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси z.



момент силы $\overline{P}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью

$$M_z(\overline{P}) = \pm P_{xy} \cdot h$$

По теореме Вариньона $M_z(\overline{P}) = \pm P_{xy} \cdot h = \pm P_x \cdot h_y \pm P_y \cdot h_x$



Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила P_{xy}, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус — когда по ходу часовой стрелки.

Частные случаи:

1) Момент силы относительно оси будет равен нулю:
- если сила параллельна оси;
- если линия действия силы пересекает ось.

Таким образом, момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

2) Если сила перпендикулярна оси (лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси), то ее момент относительно оси равен взятому с соответствующим

знаком произведению модуля силы на расстояние между линией действия силы и осью $M_z(\overline{P}) = \pm P \cdot h$

Уравнения равновесия для произвольной пространственной системы сил имеют вид:

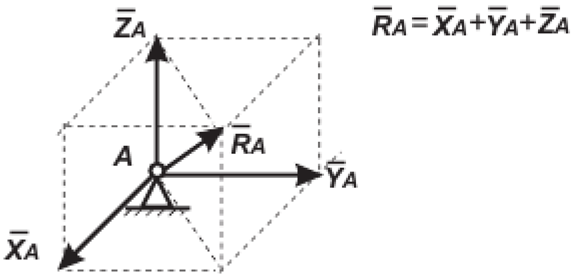
$$\begin{cases} \sum P_{x_i} = 0\ ; \\ \sum P_{y_i} = 0\ ; \\ \sum P_{z_i} = 0\ ; \\ \sum M_x(\overline{P_i}) = 0; \\ \sum M_y(\overline{P_i}) = 0; \\ \sum M_z(\overline{P_i}) = 0 \end{cases}$$

P_{x_i} , P_{y_i} , P_{z_i} - проекции силы $\overline{P_i}$ на оси координат $x,\ y,\ z$.

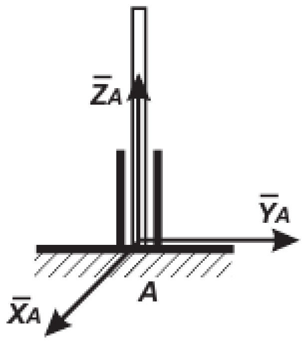
Т.е. суммы проекций всех сил на три взаимно перпендикулярные оси и сумма моментов всех сил относительно трех взаимно перпендикулярных осей равны нулю.

Внешние связи (опоры) и их реакции:

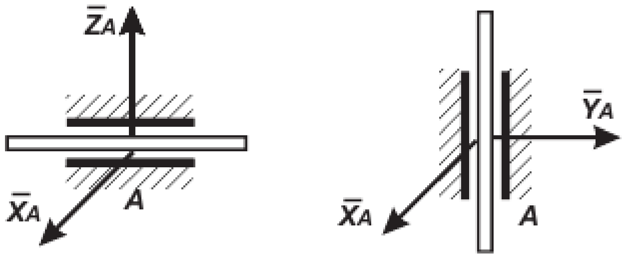
1. Неподвижный сферический шарнир - реакцию следует разложить на три составляющих



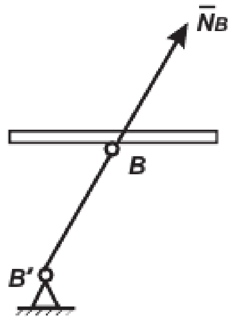
1. Подпятник - реакцию следует разложить на три составляющих, как и в сферическом шарнире



2. Подшипник – составляющие реакции перпендикулярны оси подшипника. Вдоль этой оси реакция отсутствует



3. Стержневая опора (невесомый стержень) – реакция всегда направлена вдоль стержня



Задача

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены под прямым углом друг к другу и закреплены подпятником в точке *A,* подшипником в точке *B* и стержневой опорой в точке *C*.

Определить реакции связей в точках *A* и *B* и реакцию стержня в точке *C*.

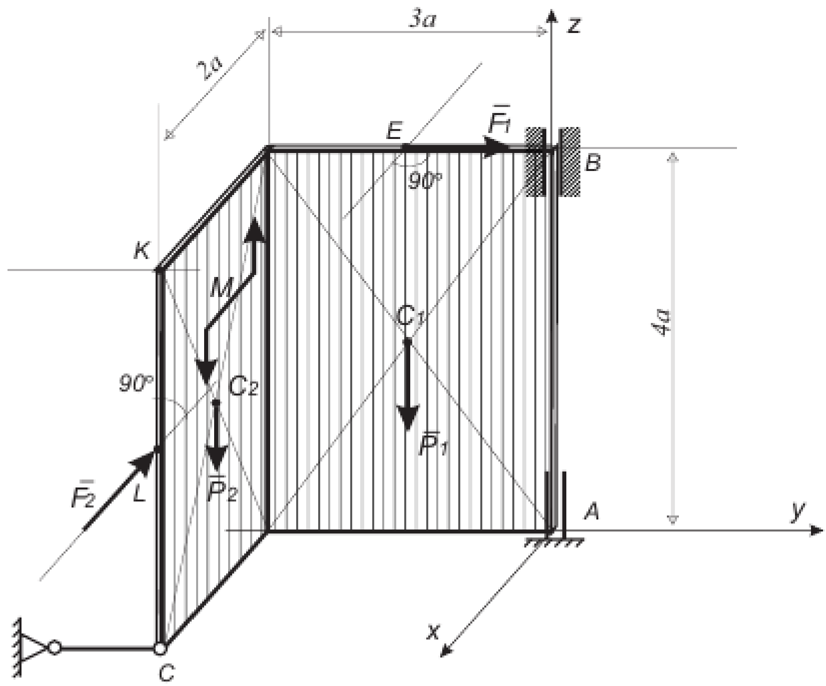


Рисунок 1.Расчетная схема пространственной конструкции

Исходные данные:

Схема 5;

P_1 = 15 кН, P_2 = 10 кН, M = 8 кН м, a=0,8 м; F_1=7 кН; α_1=90 °; точка приложения E; F_2=5 кН; α_2=90 °; точка приложения L.

Указания к решению задачи

Это задача на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении следует учесть, что реакция подпятника имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция подшипника — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Реакция стержневой опоры всегда направлена вдоль стержня. При вычислении момента силы следует разложить ее на составляющие, параллельные координатным осям. Момент силы равен сумме моментов ее составляющих (теорема Вариньона).

Решение

Составляющие сосредоточенных нагрузок:

$F_{1x} = F_1 \sin 90^\circ = 0$ $\qquad$ $F_{1y} = F_1 \cos 90^\circ = F_1 = 7\,кН;$

$F_{2x} = F_2 \cos 90^\circ = F_2 = 5\,кН;$ $\qquad$ $F_{2z} = F_2 \sin 90^\circ = 0;$

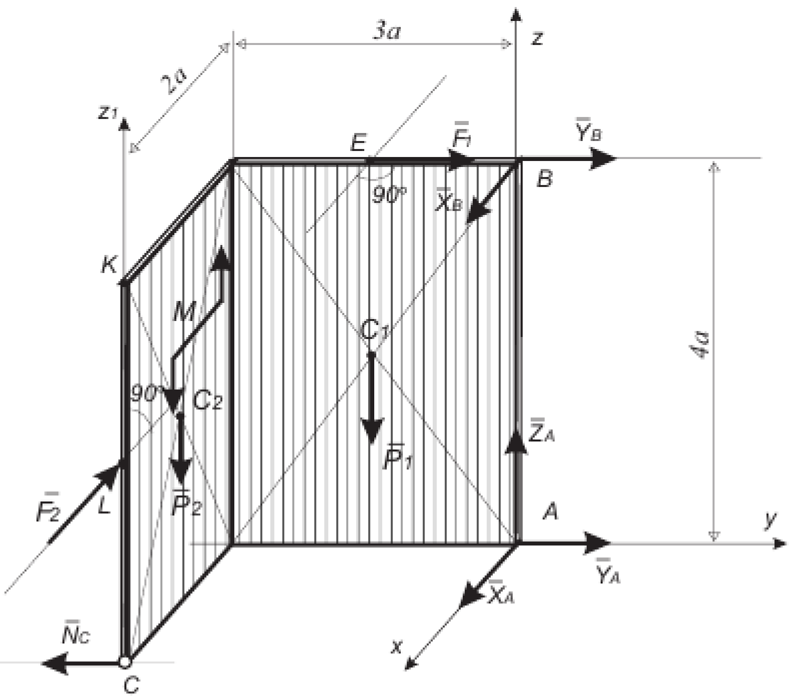


Рисунок 2.Схема сил пространственной конструкции

Уравнения равновесия пространственной конструкции:

$\sum X_i = 0 \;\Rightarrow\; X_A + X_B - F_2 = 0;$

$\sum Y_i = 0 \;\Rightarrow\; Y_A + Y_B - N_C + F_1 = 0;$

$\sum Z_i = 0 \;\Rightarrow\; Z_A - P_1 - P_2 = 0;$

$\sum M_x^i = 0 \Rightarrow\; -Y_B 4a - F_1 4a + P_1 1{,}5a + P_2 3a = 0;$

$\sum M_y^i = 0 \Rightarrow\; X_B 4a - F_2 2a + M + P_2 a = 0;$

$\sum M_z^i = 0 \Rightarrow\; -F_2 3a - N_C 2a = 0$

Определяем неизвестные реакции связей

$$N_C = \frac{-F_2 3a}{2a} = -7{,}5\ кН;$$

$$X_B = \frac{F_2 2a - M - P_2 a}{4a} = -2{,}5\ кН;$$

$$Y_B = \frac{-F_1 4a + P_1 1{,}5a + P_2 3a}{4a} = 6{,}125\ кН;$$

$$Y_A = -Y_B + N_C - F_1 = -20{,}625\ кН;$$

$$Z_A = P_1 + P_2 = 25{,}0\ кН;$$

$$X_A = -X_B + F_2 = 7{,}5\ кН;$$

Отрицательные знаки некоторых реакций указывают, что их истинное направление противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Составим проверочное уравнение – сумма моментов относительно произвольно выбранной оси *z1*:

$$\sum M^{i}_{z1} = 0 \Rightarrow -Y_A 2a - X_A 3a - X_B 3a - Y_B 2a - F_1 2a =$$

$$= 20{,}625 \cdot 1{,}6 - 7{,}5 \cdot 2{,}4 + 2{,}5 \cdot 2{,}4 - 6{,}125 \cdot 1{,}6 - 7 \cdot 1{,}6 = +39{,}0 - 39{,}0 = 0$$

Проверка сошлась.

Ответ:

$$N_C = -7{,}5\ кН;$$

$$X_B = -2{,}5\ кН;$$

$$Y_B = 6{,}125\ кН;$$

$$Y_A = -20{,}625\ кН;$$

$$Z_A = 25{,}0\ кН;$$

$$X_A = 7{,}5\ кН;$$